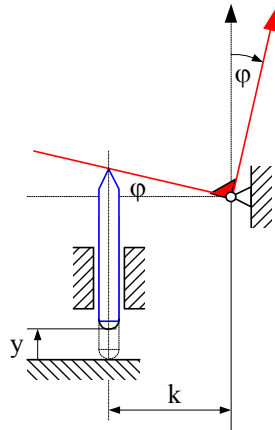


## Gyakorló feladatok linearitásra

### A) Munkaponti linearizálás, linearitási hiba

#### A1 Kidolgozott példa

Az ábrán látható „tangens mechanizmus” tapintóját az alaphelyzetből  $y$  távolsággal elmozdítva az emeltyű  $\varphi$  szöggel fordul el.



a) Írja fel a  $\varphi(y)$  függvénykapcsolatot!

$$\left(\varphi = \operatorname{actg} \frac{y}{k}\right)$$

b) Írja fel az  $y=0$  munkapontban linearizált függvénykapcsolatot!

A  $\varphi(y)$  függvény Taylor-sorának felírásához szükséges mennyiségek a következők:

A függvény értéke az  $y_0=0$  munkapontban  $\varphi(0) = \operatorname{arctg} \frac{0}{k} = 0$

A derivált függvény  $\frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{k}\right)^2} \cdot \frac{1}{k}$

A derivált helyettesítési értéke a munkapontban  $\left. \frac{d\varphi(y)}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{k}$

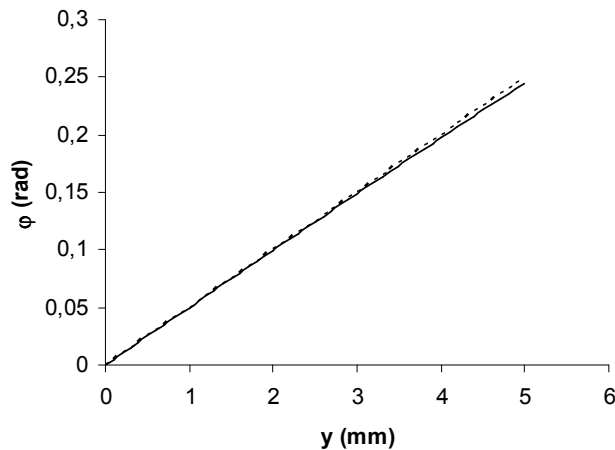
A függvényt Taylor-sorának első két tagjával közelítjük (“Munkaponti linearizálás”)

$$\varphi \approx \varphi(0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{d\varphi(y)}{dy} \right|_{y=0} (y - 0) = \frac{y}{k}$$

c) Mekkora a mechanizmus linearitási hibája a  $0 \dots y \dots 5\text{mm}$  mérésstartományban, ha  $k=20\text{mm}$ ?

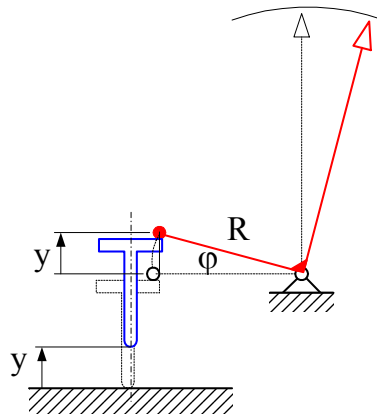
$$h_{\text{lin}} = \frac{\left| \arctg \frac{5}{20} - \frac{5}{20} \right|}{\arctg \frac{5}{20}} = 0,0204 \rightarrow \underline{\underline{2,04\%}}$$

d) Ábrázolja Excellel a  $\varphi(y)$  jelleggörbét, valamint annak  $y=0$  helyen linearizált közelítését!



## A2 feladat

Egy tapintós elmozdulás mérő műszer szinusz-mechanizmussal alakítja át a tapintó  $y$  függőleges elmozdulását a mutató szögelfordulásává. A szögemelő rövidebb karja  $R=20$  mm.



a) Írja fel a pontos összefüggést  $y$  és  $\varphi$  között!

$$\left( \varphi = \arcsin \frac{y}{R} \right)$$

b) Linearizálja az  $y(\varphi)$  kapcsolatot az  $y=0$  munkapontban (Az  $R$  kar itt vízszintes)!

Segítség:  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

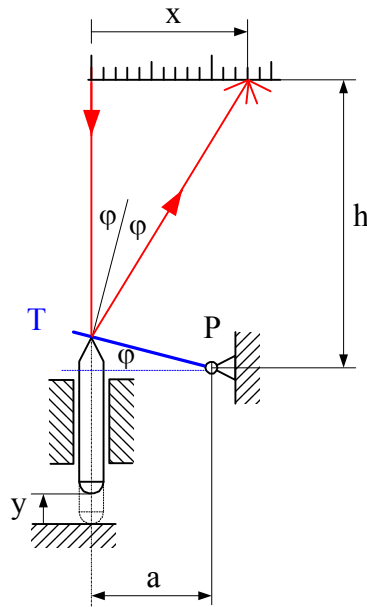
$$\left( \varphi \approx \frac{y}{R} \right)$$

c) Mekkora a műszer determinisztikus (linearitási) hibája az  $y= 0-5$  mm méréstartományban, ha a kimenőjel a mutató  $\varphi$  szögelfordulása?

(1,07%)

### A3 feladat

Egy fénymutatós hosszmérő műszer tapintójának  $y$  elmozdulása  $\varphi$  szöggel fordítja el a T tükröt. A tükröt függőleges lézernyílás világítja meg, mely a tükrőről visszaverődve a mércét  $x$



távolságban metszi.

a) Írja fel a műszer  $x(y)$  nagyítási függvényét!

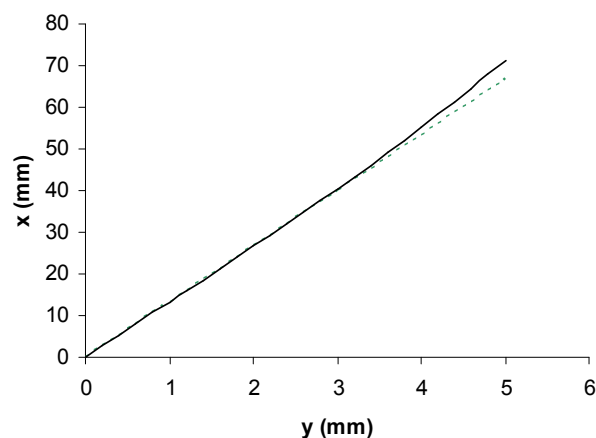
$$\left( x = (h - y) \frac{2ya}{a^2 - y^2} \right)$$

b) Írja fel a műszer  $y=0$  munkapontban linearizált  $x(y)$  nagyítási függvényét!

$$\left( x = \frac{2h}{a} y \right)$$

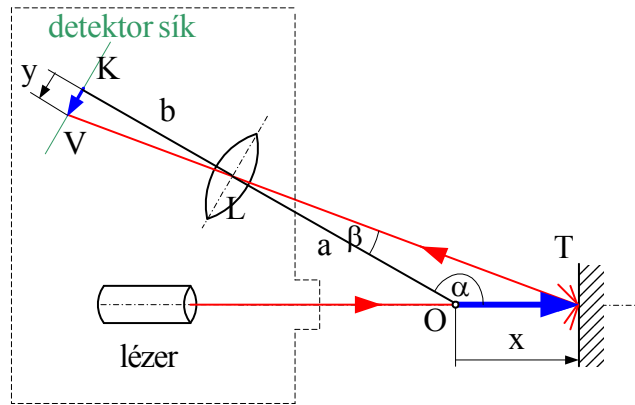
c) Mekkora a műszer linearitási hibája a  $0 \dots y \dots 5$ mm méréstartományban, ha  $h=100$ mm,  $a=15$ mm?

(6,8%)



### A4 feladat

Az ábrán látható lézeres hosszmérő egy lézersugarat bocsát ki, mely a T tárgyról visszaverődve az  $\alpha$  szöget bezáró KO optikai tengelyű lencsén (L) keresztül az optikai tengelyre merőleges detektormátrix felületére vetődik. A mérendő  $x$  távolság az  $y$  hosszúságú képvektorra képződik le.



a) Írja fel a műszer  $y(x)$  nagyításának függvénykapcsolatát adott  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  esetén!

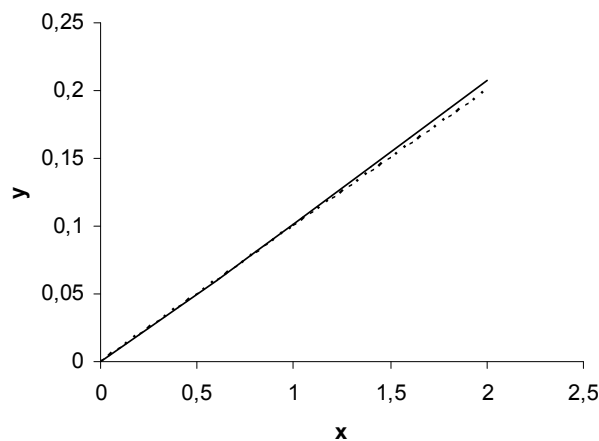
$$(y = \frac{b \sin \alpha \cdot x}{a - x \cos \alpha})$$

(Segítség: Az LOT háromszögben a szinusz tétellel fejezze ki  $\text{tg} \beta$  értékét, majd a KLV derékszögű háromszögből  $y$ -t!)

b) Írja fel az  $x=0$  pontban linearizált függvénykapcsolatot!

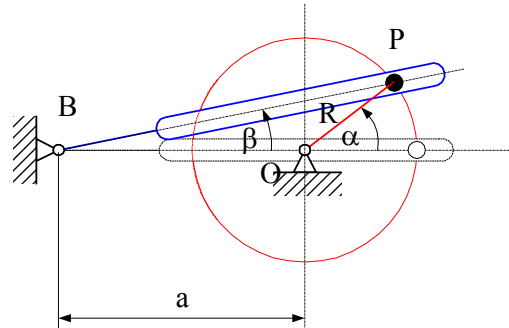
$$(y \approx \frac{b \sin \alpha}{a} \cdot x)$$

c) Mekkora a műszer linearitási hibája a  $0 \dots x \dots 2 \text{mm}$  méréstartományban, ha  $\alpha=150^\circ$ ,  $a=50 \text{mm}$ ,  $b=10 \text{mm}$ .



### A5 feladat

A „kulisszás mechanizmus” R sugarú OP forgattyúkarját alaphelyzetből  $\alpha$  szöggel elfordítva a kulissza a B pont körül  $\beta$  szöggel fordul el.



a) Írja fel a mechanizmus  $\beta(\alpha)$  függvénykapcsolatát!

$$\left( \beta = \arctg \frac{r \sin \alpha}{a + r \cos \alpha} \right)$$

b) Írja fel az  $\alpha=0$  munkapontban linearizált függvénykapcsolatot!

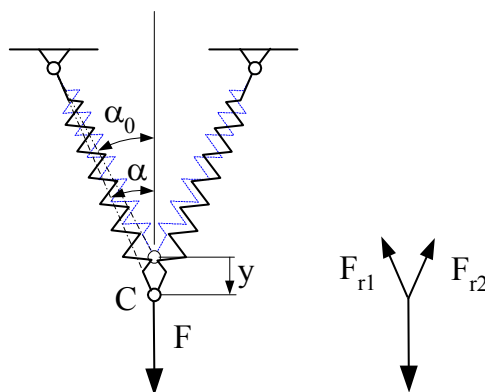
$$\left( \beta \approx \frac{r}{a + r} \alpha \right)$$

c) Mekkora a  $\beta(\alpha)$  függvény linearitási hibája a  $0 \dots \alpha \dots 0,2$  rad tartományban, ha  $r=5$  cm és  $a=15$  cm?

$$(h_{lin}=0,25\%)$$

### A6 feladat

Két egyforma,  $l_0$  terheletlen hosszú és  $c$  rugómerevségű rugó közös C pontját F erővel húzzuk, miközben a C pont y-nal elmozdul. A rugók kezdetben  $\alpha_0$  szöget zárnak be a függőlegessel.



a) Vezessen le általános (tetszőlegesen nagy megnyúlásra is érvényes) összefüggést az F húzóerő és az y megnyúlás között. (Segítség: három erő egyensúlya a C pontban. Rugóerő=hosszváltozás\*rugómerevség)

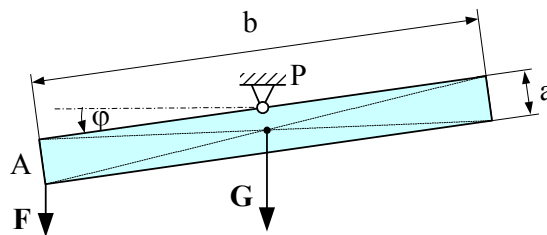
$$(F = 2c(\sqrt{l_0^2 + 2l_0 \cos \alpha_0 y + y^2} - l_0) \frac{l_0 \cos \alpha_0 + y}{\sqrt{l_0^2 + 2l_0 \cos \alpha_0 y + y^2}})$$

b) Kis megnyúlás ( $y \sim 0$ ) esetén munkaponti linearizálással írja fel a kapcsolatot  $F$  és  $y$  között.

$$(F = 2c \cdot \cos \alpha_0^2 \cdot y)$$

### A7 feladat

Az ábrán látható  $G=2\text{N}$  súlyú,  $a=20\text{mm}$  és  $b=100\text{mm}$  élhosszúságú, homogén tömegeloszlású gerenda (mérleg) a  $P$  pontban csuklóosan van rögzítve. A gerenda  $A$  pontjában  $F$  erőt működtetünk, melynek hatására a gerenda  $\varphi$  szöggel elfordul.



a) Írja fel a  $\varphi(F)$  függvénykapcsolatot! (Segítség: Nyomatéki egyensúlyi egyenlet P-re)

$$(\varphi = \arctg \frac{Fb}{a(G + 2F)})$$

b) Írja fel a linearizált függvénykapcsolatot! (Munkapont:  $F=0$ )

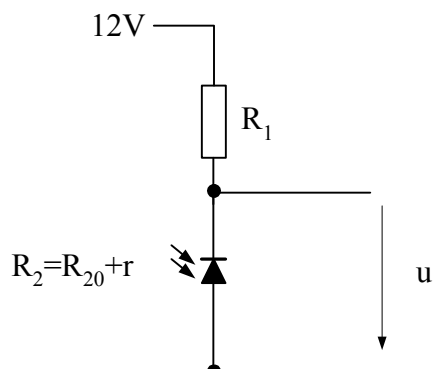
$$(\varphi \approx \frac{b}{aG} F)$$

c) Mekkora a mérleg linearitási hibája a  $0 \dots F \dots 0,1\text{N}$  méréstartományban?

$$(h_{lin}=10,6\%)$$

### A8 feladat

Egy terheletlen feszültségosztó egyik ellenállása  $R_1=1\text{ k}\Omega$  állandó, a másik ellenállását egy változó ellenállású fotodióda képezi, melynek munkaponti ellenállása  $R_2=5\text{ k}\Omega$ . Az  $r$  komponens a megvilágítástól függően változik (csökken).

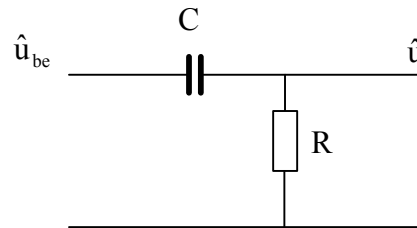


Írjon fel  $r=0$  értéknél linearizált kapcsolatot a kimenő feszültség és az  $r[k\Omega]$  ellenállás-változás között, ha a kapocsfeszültség  $12\text{ V}$ ! ( $r \ll R_{20}$ )

$$(u \approx 12 \frac{5}{6} + 12 \frac{1}{6^2} r)$$

### A9 feladat

Kis frekvencia mérésére az ábrán látható áramkört használhatjuk. Az áramkör bemenetére állandó  $\hat{u}_{be}$  amplitúdójú,  $\omega$  körfrekvenciájú szinuszos feszültséget kapcsolunk. A kimenet  $\hat{u}$  amplitúdójú szinuszos feszültség. A frekvencia változására a kimenő feszültség amplitúdójának változásából következtetünk.



a) Írja fel a pontos  $\hat{u}(\omega)$  függvénykapcsolatot!

(Segítség: a kondenzátor kapacitív ellenállása  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ )

$$(\hat{u} = \hat{u}_{be} \frac{RC\omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}})$$

b) Írja fel az  $\omega=0$  helyen (munkapontban) linearizált  $\hat{u}(\omega)$  függvénykapcsolatot!

$$(\hat{u} \approx \hat{u}_{be} RC\omega)$$

c) Mekkora a linearitási hiba a  $0 \dots \omega \dots 40$  rad/s tartományban, ha  $RC=0,01$  s?

(7,1%)

### A10 feladat

Linearizálja az  $y=\sin(x)$  függvényt az  $x_0=\pi/3$  pont környezetében! Mekkora az elkövetett hiba az  $x=1,1$  rad helyen?

$$(\sin x \approx 0,866 + 0,5(x - \pi/3); \text{hiba} = 0,157\%)$$

### A10 feladat

Linearizálja az  $y = \sqrt{1+x}$  összefüggést az  $x=0$  helyen! ( $x \ll 1$ )

$$(\sqrt{1+x} \approx 1 + 0,5x)$$

### A11 feladat

Linearizálja az  $y = \frac{1}{1+x}$  összefüggést az  $x=0$  helyen! ( $x \ll 1$ )

$$(\frac{1}{1+x} \approx 1 - x)$$

### A12 feladat

Linearizálja az  $y=\sin(x)$  függvényt az  $x=0$  környezetében!

$$(\sin x \approx x)$$

---

### A13 feladat

Egy laprugó erő-elmozdulás karakterisztikája az  $F = 2000 \cdot (1 - e^{-0,1x})$  egyenlettel adható meg. Határozza meg a rugó linearizált  $F=f(x)$  egyenletét kis elmozdulások ( $x \sim 0$ ) esetén!

$$(F \approx 200x)$$

---

### A14 feladat

Egy rugó erő-hosszváltozás kapcsolatát leíró egyenlet  $F[\text{N}] = 10^4 x - 4000x^2$ , ha az „ $x$ ” hosszváltozást méterben mérjük. A rugó megnyúlása  $x_0=0,05\text{m}$  kis környezetében változik csak.

a) Határozza meg a rugó linearizált egyenletét e munkapont környezetében!

$$(F \approx 9600x + 10)$$

b) Mekkora a rugó differenciális merevsége az  $x_0=0,05$  munkapontban?

$$(c=9600 \text{ N/m})$$

---

## B) Lineáris regressziószámítás

### B1 feladat

Két fizikai mennyiség mérésrel meghatározott összetartozó értékeit az alábbi táblázat tartalmazza.

i	$x_i$	$y_i$
1	20	1,8
2	40	3,85
3	60	6
4	80	8,2
5	100	10

A két mennyiség kapcsolata lineárisnak tekinthető. Határozza meg a regressziós egyenes egyenletét!

$$(y=0,10375x-0,255)$$

---

### B2 feladat

Két fizikai mennyiség mérésrel meghatározott összetartozó értékeit az alábbi táblázat tartalmazza.

i	$x_i$	$y_i$
---	-------	-------



1	(0)	(0)
2	2	19
3	4	82
4	6	177
5	8	324

A két mennyiség kapcsolata között hatványfüggvény kapcsolat van. Lineáris regressziószámításra visszavezetve határozza meg a keresett függvénykapcsolatot!  
 $(y=4,6956 \cdot x^{2,0371})$

---

### B3 feladat

Egy útmérő szenzor hitelesítő (kalibrációs) diagramjának mérési pontjai a táblázatban találhatók.

i	$x_i$ [mm]	$U_i$ [V]
1	0	0
2	1	2,1
3	2	4,3
4	3	6
5	4	7,6
6	5	10

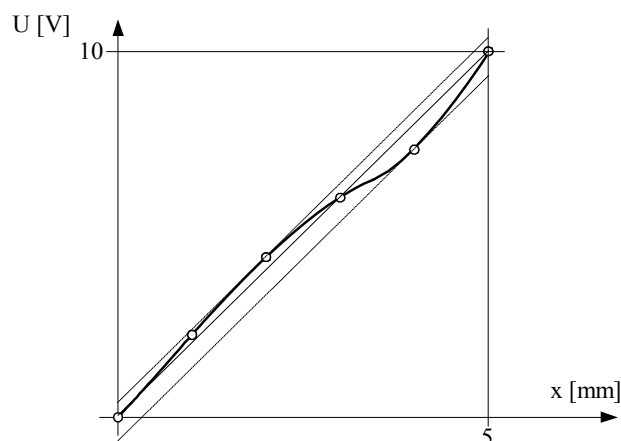
a) Határozza meg a regressziós egyenes egyenletét!

b) Hány százalék a szenzor linearitási hibája a 0...x...5mm méréstartományon belül az a) pontban meghatározott regressziós egyenesre vonatkoztatva?

(4 %)

c) Mekkora a szenzor érzékenysége?

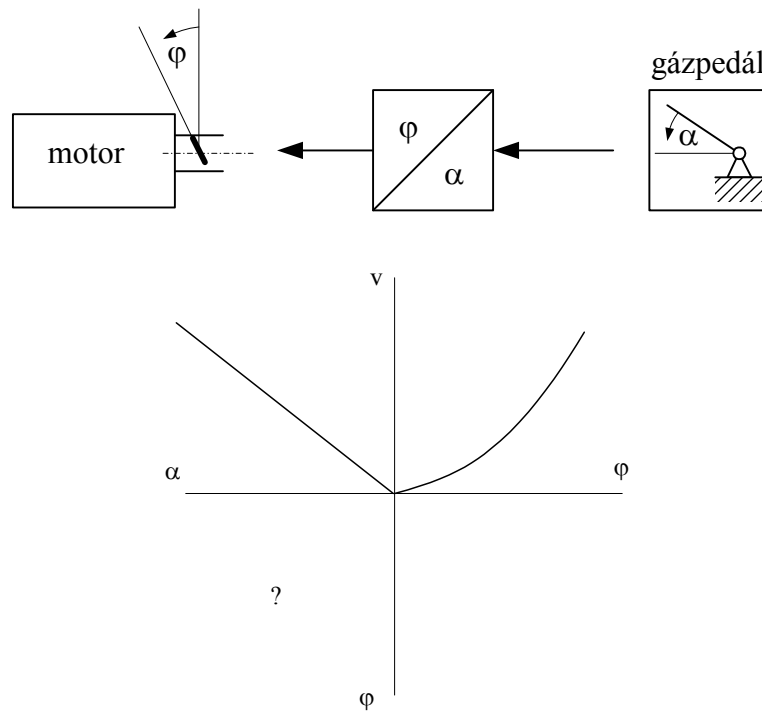
(2V/mm)



### C. Jelleggörbe linearizálás teljes tartományban

#### C1 feladat

Egy autómotor "φ" pillangószelep szögelfordulása és az autó "v" sebessége közötti összefüggés a diagramon látható. A gázpedál szögelfordulása α. Milyen φ-α karakterisztikájú elektronikus szögelfordulás átalakítót kell beépíteni a gázpedál és a pillangószelep közé, hogy az autó sebessége arányos legyen a gázpedál α szögelfordulásával? A feladatot szerkesztéssel oldja meg!



---

#### C2 feladat

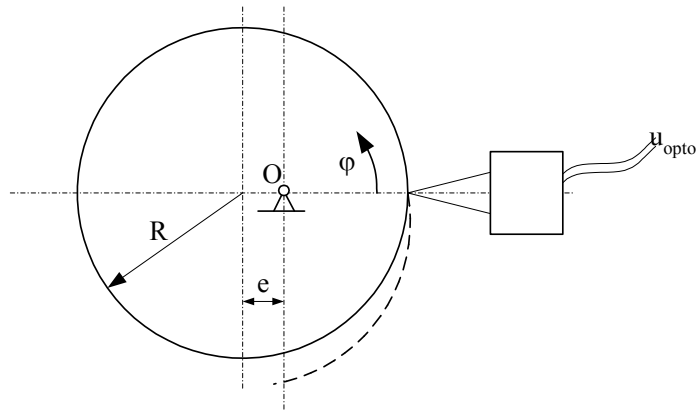
Oldja meg a C1 feladatot analitikusan, ha  $v=10\varphi+5\varphi^2$  és  $v=80\alpha$ .

$$\left(\varphi = \frac{-1 + \sqrt{1 + 16\alpha}}{2}\right)$$

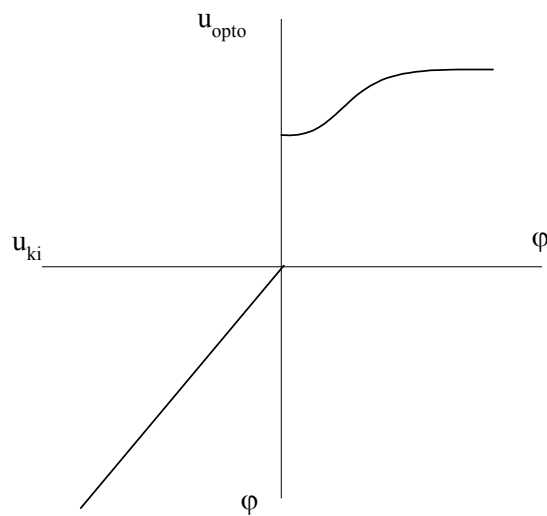
---

#### C3 feladat

Szögelfordulást mérünk úgy, hogy egy O pont körül forgó tengelyhez R sugarú tárcsát erősítünk e excentricitással.



A tárcsa kerületi pontjai a  $\varphi$  elfordulás során változtatják távolságukat egy reflexió optokaputól. Az optokapu a szögelfordulás függvényében a diagramon látható feszültséget adja.



Milyen karakterisztikájú  $u_{ki}$ - $u_{opto}$  feszültség átalakítót kell beépíteni az optokapu után, hogy a szenzor kimenete arányos legyen a tárcsa elfordulásával? A feladatot szerkesztéssel oldja meg!

---

#### C4 feladat

6) Egy távolságmérő szenzor diódája az  $x$ [mm] távolság függvényében  $u_d = 0,12 \cdot x^{1,06}$  [V] feszültséget ad. Határozza meg annak a dióda után kapcsolt villamos linearizáló áramkörnek az  $u_{ki}=f(u_d)$  egyenletét, mely  $u_{ki}$ [V]= $2 \cdot x$ [mm] lineáris eredő karakterisztikát eredményez!

$$(u_{ki}=14,7777 \cdot u_d^{0,9433})$$


---